**Tema 3.2.1. Distribución Gamma.**

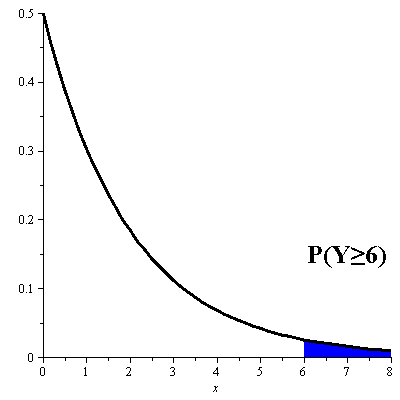
**Motivación del tema.** La función de densidad gamma se utiliza para estudiar fenómenos naturales como los temblores. Las magnitudes sísmicas, en la escala Richter, pequeñas o grandes son poco probables. Las magnitudes más frecuentes son las que están entre 1 y 4. La siguiente gráfica muestra ese comportamiento y corresponde a una distribución gamma con parámetros y ,



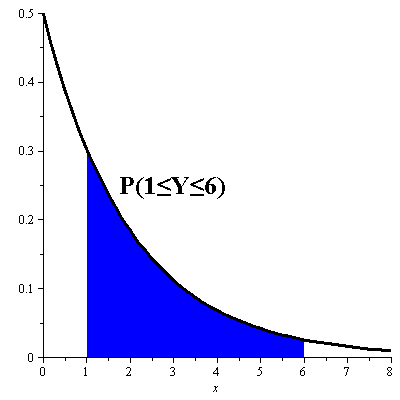
La ecuación de la función de densidad gamma es

Así que la función de densidad para la magnitud de un sismo es:

Obtenga la probabilidad de que la magnitud de un sismo (a) sea mayor que 6, (b) esté entre 1 y 6. Primero calculamos utilizando la propiedad , para obtener . Ahora si es la variable aleatoria que mide la magnitud sísmica, entonces la probabilidad para (a) es



Para (b) la probabilidad es



**Definición 1. Distribución Gamma.** Una variable aleatoria tiene una distribución de probabilidad tipo gamma con parámetros y si su función de densidad es

,

donde es la función gamma definida como:

.

**Teorema 1. Propiedades de la Función Gamma.**

**Demostración.** La fórmula 1 se obtiene directamente

Demostramos (2) haciendo una integración por partes con

y

y

entonces

donde la primera expresión evaluada en 0 es 0.

La fórmula 3 se demuestra con la 2 aplicándola veces, es decir

La fórmula 4 se demuestra con el cambio de variable

, y

El valor de la última integral lo obtuvimos de la integral que nos ayudó a demostrar que la función de densidad normal satisface

**Teorema 2. Propiedades de la Distribución Gamma**

|  |  |
| --- | --- |
| Esperanza |  |
| Varianza |  |
| Función Generadora de Momentos |  |

**Demostración.**

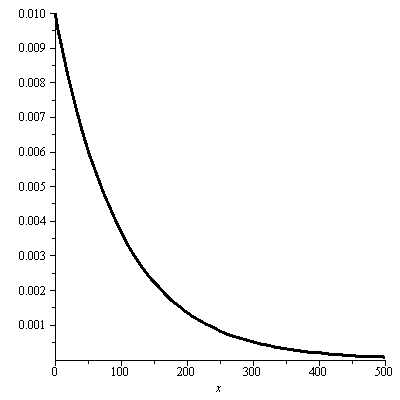
donde hemos utilizado que

es una distribución gamma con parámetros y y que por lo tanto la integral vale .

**Observación.** La distribución gamma contiene 2 casos muy importantes de distribuciones

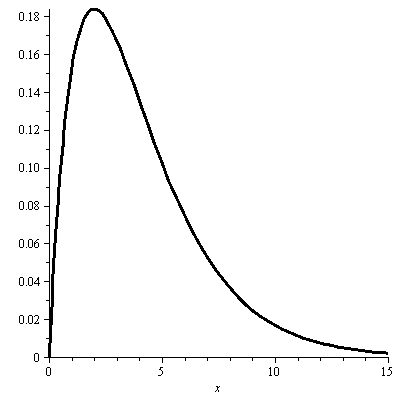
* Cuando en la distribución gamma , se obtiene la distribución exponencial:

Por ejemplo, la gráfica de la distribución exponencial con es



* Cuando en la distribución gamma y , se obtiene la distribución ji-cuadrada con grados de libertad

Por ejemplo, la gráfica de la distribución ji-cuadrada con grados de libertad es



La distribución ji-cuadrada es muy importante en estadística y hay tablas para ella



Con esta tabla podemos encontrar el número que deja en la cola derecha un área de en una distribución ji-cuadrada con grados de libertad. Por ejemplo, el número es el que deja en la cola derecha un área de en una distribución ji-cuadrada con 23 grados de libertad.

**Ejercicios.**

1. En cierta ciudad, el consumo diario de agua, en millones de litros, sigue una distribución gamma con y . Si el consumo diario de agua en esta ciudad es de 9 millones de litros, ¿cuál es la probabilidad de que en un día cualquiera el abastecimiento de agua sea insuficiente?

Respuesta: 0.1992

1. En una ciudad, el consumo diario de energía eléctrica en millones de kilowatts-hora, es una variable aleatoria que tiene una distribución gamma con media y varianza , (a) obtenga los valores de y , (b) encuentre la probabilidad de que en día el consumo exceda los 12 millones de kilowatts-hora.

Respuesta: (a) , (b) 0.0620

1. Supóngase que un sistema contiene componentes cuya duración útil en años, está dada por la variable aleatoria , distribuida como una gamma con y . Si se instalan 5 de estos componentes en diferentes sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 funcionen todavía al término de 8 años?

Ayuda: combine la distribución gamma para calcular primero que un solo componente dure más de 8 años y después utilice la distribución binomial para calcular que por lo menos 2 componentes funcionen después de 8 años de los cinco.

Respuesta: 0.2621